文章编号:1000-4939(2023)03-0589-08

功能梯度石墨烯增强复合材料梁的屈曲及后屈曲精确解

张靖华[1],马浩[2]

(1. 兰州理工大学理学院,730050 兰州;2. 六环传动(西安)科技有限公司,710000 西安)

摘 要:采用精确解析求解方法研究石墨烯片(GPL)增强功能梯度梁的非线性屈曲及后屈曲力学行为。研究中假定GPL均匀地分布在梁的每一层,但其重量分数沿厚度方向呈梯度或均匀变化,导致结构的物性参数沿厚度方向连续梯度变化,并根据Halpin-Tsai力学模型和混合率法则得到材料的等效物性参数。同时基于Euler-Bernoulli梁理论和Von-Kármán非线性应变位移关系由能量变分法获得石墨烯片增强功能梯度梁的非线性控制方程,对此方程进行精确解析求解获得临界载荷、屈曲模态以及后屈曲变形的解析表达式。并进行参数研究分析了GPL的重量分数、几何形状及尺寸和分布方式对该复合材料梁非线性屈曲和后屈曲的影响。

关键词:功能梯度梁;石墨烯片;屈曲;后屈曲;精确解

中图分类号:TB332;O343 **文献标志码**:A **DOI**:10.11776/j.issn.1000-4939.2023.03.010

Exact solutions for buckling and post-buckling of functionally grade graphene reinforced composite beams

ZHANG Jinghua[1], MA Hao[2]

(1. School of Sciences, Lanzhou University of Technology, 730050 Lanzhou, China;
2. Liuhuan Transmission (Xi'an) Technology Co., Ltd, 710000 Xi'an, China)

Abstract: In this paper, nonlinear buckling and post-buckling behaviors of functionally graded beams reinforced by graphene platelets (GPL) are studied by exact analytical method. It is assumed that GPL is uniformly distributed in each layer of the beam, and its weight fraction varies gradient along the thickness direction, which leads to continuous and gradient changes of the materials properties along the thickness. According to Halpin-Tsai mechanical model and mixing rate rule, the equivalent materials properties are obtained. Simultaneously, based on Euler Bernoulli beam theory and Von-Kármán nonlinear strain-displacement relationship, nonlinear governing equations of the graphene platelets reinforced functionally graded beam are obtained by energy variational method. And the analytical expressions of critical buckling loads, buckling modes and post-buckling deformations are obtained through exactly and analytically solve the nonlinear governing differential equations. The effects of the weight fraction, geometrical parameters and

收稿日期:2022-04-15 **修回日期**:2023-03-16
基金项目:国家自然科学基金资金项目(No. 12062010);甘肃省基础研究创新群体资金项目(No. 20JR5RA478);陕西省科技厅资助项目(No. 2018JM1030)
通信作者:张靖华,教授。E-mail: zjhhrb@163.com
引用格式:张靖华,马浩. 功能梯度石墨烯增强复合材料梁的屈曲及后屈曲精确解[J]. 应用力学学报,2023,40(3):589-596.
ZHANG Jinghua, MA Hao. Exact solutions for buckling and post-buckling of functionally grade graphene reinforced composite beams[J]. Chinese journal of applied mechanics, 2023, 40(3):589-596.

distributions of GPL on the nonlinear buckling and post-buckling of the composite beam are analyzed by parameters research.

Key words: functionally graded beam; graphene platelet; buckling; post-buckling; exact solution

石墨烯独特的二维结构赋予它优异的力学性能,使它成为非常理想的增强材料。将少量的石墨烯或其衍生物作为增强体加入基体成为石墨烯增强复合材料[1],比传统碳纤维和碳纳米管更能显著提高结构的强度和刚度[2]。将功能梯度材料[3]卓越的设计理念推广到石墨烯增强复合材料中,也就是将石墨烯片(graphene platelets,GPL)叠成的小块作为增强体、方向随机且均匀地散布在每层基体中,石墨烯含量在基体厚度方向上逐层呈梯度或均匀分布,形成新一代的先进复合材料,即功能梯度石墨烯增强复合材料[1](functionally graded graphene platelets reinforced composite,FG-GPLRC)。FG-GPLRC也具有非凡的力学性能,主要取决于石墨烯,可以通过合理设计石墨烯片的分布方式、重量分数和几何参数得到最优的整体力学性能。

FG-GPLRC结构的力学性能研究近年来已成为固体力学中一个新的研究领域。在线性稳定性方面,KITIPORNCHAI等[4]采用里兹法对GPL增强功能梯度多孔梁的自由振动和弹性屈曲进行了研究。WU等[5]对处于热环境中同时受轴向载荷作用的多层石墨烯增强功能梯度梁的动力稳定性进行了研究。YANG等[6]基于能量法研究了石墨烯增强纳米复合材料拱在点载荷作用下的动态屈曲。LU等[7]基于一阶剪切变形板理论和最小势能原理研究了石墨烯增强功能梯度压电板的屈曲特性。KIANI[8]对热环境中受外部压力作用下功能梯度石墨烯增强锥壳的屈曲进行了研究。TAM等[9]对含有开放边缘裂纹的石墨烯增强功能梯度复合材料梁的屈曲进行了研究。SHAHGHOLIAN等[10]基于一阶剪切变形理论对石墨烯增强多孔纳米复合材料圆柱壳的屈曲进行了研究。PARASHAR等[11]采用有限元法对受轴向载荷作用下的石墨烯增强环氧复合板的屈曲进行了研究。通过研究表明当石墨烯片的体积分数是6%时,该结构的屈曲强度提高26%。EBRAHIMI等[12]研究了热环境中GPL增强聚合物复合材料板在黏弹性地基上的屈曲特性。同时考虑了GPL的4种分布模式,通过Hamilton原理建立了GPL增强板的控制方程,用Navier解法对该问题进行了分析求解。SUN等[13]基于Donnell壳理论对石墨烯增强功能梯度复合材料圆柱壳的扭转屈曲进行了研究,并由此得到了FG-GPLRC壳体的临界屈曲载荷和相应的屈曲模态。

以上研究仅限于线性问题。由于FG-GPLRC结构的高强度、高韧性使其能承受较大变形,对该类结构进行非线性大变形分析远比线性小变形分析更加有意义。在非线性稳定性的研究方面,YANG等[14]在考虑弹性地基影响的同时通过微分求积法对石墨烯增强功能梯度复合材料梁的屈曲及后屈曲问题进行了研究。CHEN等[15]应用直接迭代法研究了泡沫金属基GPL增强多层功能梯度多孔纳米复合材料梁的后屈曲行为。SHEN等[16]研究了功能梯度石墨烯增强复合材料层合梁在弹性地基上的热后屈曲及非线性弯曲。WANG等[17]对GPL增强压电复合材料梁的屈曲和后屈曲行为进行了分析,考虑剪切变形和非线性应变-位移关系,利用虚功原理建立了该梁的控制微分方程,采用微分求积法定量地研究了影响屈曲性能的因素。ANSARI等[18]基于一阶剪切变形壳理论和Von-Kármán非线性几何关系研究了功能梯度石墨烯片增强聚合物纳米复合材料圆柱壳的后屈曲,并利用Fourier级数和微分求积数法提出了半解析解的方法。SONG等[19]在考虑弹性地基和边缘裂纹影响的同时基于一阶剪切变形梁理论,研究了石墨烯复合材料多层梁的热屈曲和后屈曲。SAHMANI等[20]基于非局部应变梯度理论研究了轴向载荷作用下GPL增强多层功能梯度复合纳米板的非线性屈曲及后屈曲。

目前石墨烯增强功能梯度材料结构非线性力学行为的已有研究还比较少,尤其对该结构非线性稳定性问题的非线性控制微分方程进行精确解析求解方面鲜有文献报道。本研究在考虑非线性大变形的情况下,基于Halpin-Tsai力学模型[21],用解析法精确求解石墨烯增强功能梯度梁的非线性稳定性控制方程,获得临界屈曲载荷、屈曲模态和后屈曲变形的表达式,并分析GPL的重量分数、不同的分布模式、几何形状和尺寸等对临界屈曲载荷的影响。

1 数学模型

1.1 材料物性参数

考虑图1所示长为l、宽为b、高为h的石墨烯增

强功能梯度梁，由完全等厚的 GPL 增强层黏合而成，并且每层中的石墨烯为均匀分布，但不同层中石墨烯含量不同。本研究考虑各层中石墨烯的含量具有 U-GPLRC、X-GPLRC 和 O-GPLRC 3 种不同分布模式如图 1 所示，图中颜色越深则石墨烯浓度越大。U-GPLRC 表示 GPL 在每一层均匀分布且浓度相同；X-GPLRC 表示 GPL 在上层和下层具有较高的浓度而在中间浓度最低；O-GPLRC 表示 GPL 在上、下层具有较低的浓度而中间层具有较高的浓度。这 3 种分布模式的第 k 层 GPL 体积分数 $V_{GPL}^{(k)}$ 表达分别为

U-GPLRC：$V_{GPL}^{(k)} = V_{GPL}^{*}$，

X-GPLRC：$V_{GPL}^{(k)} = 2V_{GPL}^{*}|2k - N_L - 1|/N_L$，

O-GPLRC：$V_{GPL}^{(k)} = 2V_{GPL}^{*}(1 - |2k - N_L - 1|)/N_L$

式中：$k = 1,2,3\cdots N_L$，N_L 是梁的总层数；V_{GPL}^{*} 是 GPL 总的体积分数，可表示为

$$V_{GPL}^{*} = \frac{g_{GPL}}{g_{GPL} + (\rho_{GPL}/\rho_M)(1 - g_{GPL})}$$

式中：g_{GPL} 是石墨烯的质量分数；ρ_M 和 ρ_{GPL} 分别为聚合物基体和石墨烯的密度。

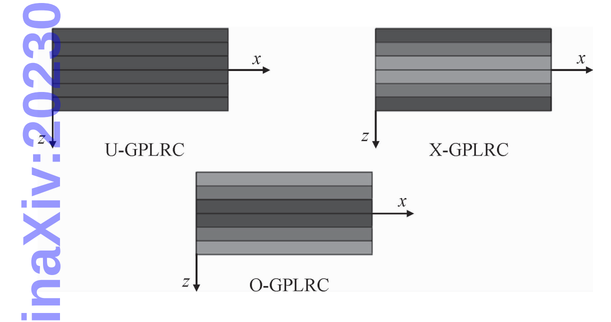


图 1　3 种不同的 GPL 分布模式

Fig. 1　Three different GPL distribution patterns

FG-GPLRC 结构第 k 层的弹性模量 $E_C^{(k)}$ 基于目前广泛采用的 Halpin-Tsai 微观力学模型给出[22]，即

$$E_C^{(k)} = \left(\frac{3}{8}\frac{1 + \xi_L\eta_L V_{GPL}^{(k)}}{1 - \eta_L V_{GPL}^{(k)}} + \frac{5}{8}\frac{1 + \xi_W\eta_W V_{GPL}^{(k)}}{1 - \eta_W V_{GPL}^{(k)}}\right)E_M \tag{1}$$

式中 $\eta_L = \dfrac{(E_{GPL}/E_M) - 1}{(E_{GPL}/E_M) + \xi_L}$，$\eta_W = \dfrac{(E_{GPL}/E_M) - 1}{(E_{GPL}/E_M) + \xi_W}$。$E_M$ 和 E_{GPL} 分别为基体和石墨烯的弹性模量，ξ_L 和 ξ_W 表示 GPL 的几何形状尺寸参数，具体为

$$\xi_L = 2\left(\frac{l_{GPL}}{h_{GPL}}\right),\ \xi_W = 2\left(\frac{b_{GPL}}{h_{GPL}}\right)$$

式中 l_{GPL}、h_{GPL} 和 b_{GPL} 分别表示 GPL 的长度、宽度和厚度。

FG-GPLRC 的泊松比可由混合定律给出[22]

$$\nu_C^{(k)} = \nu_{GPL}V_{GPL}^{(k)} + \nu_M(1 - V_{GPL}^{(k)}) \tag{2}$$

式中 ν_M 和 ν_{GPL} 分别为基体材料和石墨烯的泊松比。

1.2　梁的控制方程

根据 Euler-Bernoulli 梁理论，同时考虑 Von-Kármán 非线性应变位移关系，可以得到梁的轴向应变表达式为

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} + \frac{1}{2}\left(\frac{dw}{dx}\right)^2 + z\kappa \tag{3}$$

式中：x 和 z 分别为轴向和横向坐标；u 和 w 分别为轴向位移和挠度；$\kappa = -\dfrac{d^2w}{dx^2}$ 为梁中性层的曲率。

考虑线弹性范围内的变形，由弹性本构关系可得第 k 层 FG-GPLRC 梁的正应力为[5]

$$\sigma_x^{(k)} = \frac{E_C^{(k)}}{1 - \nu_C^{(k)2}}\left[\frac{du}{dx} + \frac{1}{2}\left(\frac{dw}{dx}\right)^2 - z\frac{d^2w}{dx^2}\right] \tag{4}$$

将其沿厚度方向进行积分，可获得梁横截面上的轴力 N_x 和弯矩 M_x 表达式，即

$$N_x = \int_A \sigma_x dA = A_{11}\left[\frac{du}{dx} + \frac{1}{2}\left(\frac{dw}{dx}\right)^2\right] \tag{5a}$$

$$M_x = \int_A z\sigma_x dA = -D_{11}\frac{d^2w}{dx^2} \tag{5b}$$

式中：A 为梁横截面面积；A_{11} 和 D_{11} 分别表示梁的拉压刚度和弯曲刚度，通过积分计算可得

$$\{A_{11}, D_{11}\} = \sum_{k=1}^{N_L}\frac{E_C^{(k)}}{1 - \nu_C^{(k)2}}\left\{\frac{h}{N_L}, \frac{z_{k+1}^3 - z_k^3}{3}\right\}$$

采用最小势能原理 $\delta\Pi = \delta(U + V) = 0$ 可以推导出梁的控制方程，式中 Π、U 和 V 分别表示系统的总势能、应变能和外力势能，δ 表示变分。

FG-GPLRC 梁的应变能及其一阶变分为

$$U = \frac{1}{2}\int_\Omega \sigma_x\varepsilon_x d\Omega,\ \delta U = \frac{1}{2}\int_0^l (N_x\delta\varepsilon_x^0 + M_x\delta\kappa)dx$$

式中 $\varepsilon_x^0 = \dfrac{du}{dx} + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{dw}{dx}\right)^2$。考虑梁上作用轴向压缩载荷 $\bar{P}$，外力势能及其变分为

$$V = -\int_l \frac{1}{2}\bar{P}\left(\frac{dw}{dx}\right)^2 dx,\ \delta V = -\int_l \bar{P}\frac{dw}{dx}\delta\left(\frac{dw}{dx}\right)dx$$

通过最小势能原理得到梁的控制方程为

$$\frac{dN_x}{dx} = 0 \tag{6}$$

$$-D_{11}\frac{d^4w}{dx^4} + (N_x - \bar{P})\frac{d^2w}{dx^2} = 0 \tag{7}$$

对 FG-GPLRC 梁的屈曲及过屈曲问题的研究，即对方程组(6)和(7)进行求解，还需同时考虑边界

条件。在本研究中考虑梁的两端均是夹紧边界，相应的边界条件为

$$u=0\,,\ w=0\,,\ \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}=0 \tag{8}$$

1.3 精确解析求解

对给定边界条件的非线性控制微分方程边值问题进行精确解析求解。首先将式(6)、式(7)采用位移形式表示为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left\{A_{11}\left[\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right)^2\right]\right\}=0 \tag{9}$$

$$-D_{11}\frac{\mathrm{d}^4w}{\mathrm{d}x^4}+\left\{A_{11}\left[\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right)^2\right]-\bar{P}\right\}\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}x^2}=0 \tag{10}$$

再将式(9)对 x 进行一次积分可得

$$A_{11}\left[\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right)^2\right]=B_1 \tag{11}$$

二次积分为

$$A_{11}\left[u+\int\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right)^2\mathrm{d}x\right]=B_1x+B_2 \tag{12}$$

为了求解 B_1 和 B_2，将边界条件(8)代入式(12)可得

$$B_1=\frac{A_{11}}{2l}\int_0^l\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right)^2\mathrm{d}x\,,\ B_2=0$$

再将 B_1 所得值代入式(11)得到

$$A_{11}\left[\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right)^2\right]=\frac{A_{11}}{2l}\int_0^l\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right)^2\mathrm{d}x$$

将上式整体代入式(10)并整理即可得梁挠度的控制方程，即

$$D_{11}\frac{\mathrm{d}^4w}{\mathrm{d}x^4}+\left[\bar{P}-\frac{A_{11}}{2l}\int_0^l\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right)^2\mathrm{d}x\right]\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}x^2}=0 \tag{13}$$

为了使所求的解具有一般性，引入无量纲量，即

$$X=\frac{x}{l},W=\frac{w}{h},F=\frac{A_{11}h^2}{D_{11}},P=\frac{\bar{P}l^2}{D_{11}}=P_0\frac{D_0}{D_{11}},$$

$$P_0=\frac{\bar{P}l^2}{D_0}$$

通过代入无量纲量，可获得石墨烯增强功能梯度梁挠度的无量纲控制方程，即

$$\frac{\mathrm{d}^4W}{\mathrm{d}X^4}+\left[P-\frac{F}{2}\int_0^1\left(\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}X}\right)^2\mathrm{d}X\right]\frac{\mathrm{d}^2W}{\mathrm{d}X^2}=0 \tag{14}$$

夹紧端的无量纲形式边界条件为

$$X=0,1\text{ 时},\ W=\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}X}=0$$

为了使所求的方程形式上更加简洁，令

$$\lambda^2=P-\frac{F}{2}\int_0^1\left(\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}X}\right)^2\mathrm{d}X \tag{15}$$

则式(14)转化为

$$\frac{\mathrm{d}^4W}{\mathrm{d}X^4}+\lambda^2\frac{\mathrm{d}^2W}{\mathrm{d}X^2}=0 \tag{16}$$

方程(16)的通解为

$$W(X)=C_1\cos(\lambda X)+C_2\sin(\lambda X)+C_3X+C_4 \tag{17}$$

式中 C_1、C_2、C_3 和 C_4 表示积分常数。进一步将上述边界条件代入式(17)中有

$$W(0)=C_1+C_4=0 \tag{18a}$$

$$W(1)=C_1\cos\lambda+C_2\sin\lambda+C_3+C_4=0 \tag{18b}$$

$$W'(0)=C_2\lambda+C_3=0 \tag{18c}$$

$$W'(1)=-C_1\lambda\sin\lambda+C_2\lambda\cos\lambda+C_3=0 \tag{18d}$$

令 $C_4=C$，联立求解式(18a)~(18d)可得

$$C_1=-C\,,\ C_2=\frac{\cos\lambda-1}{\sin\lambda-\lambda}C\,,\ C_3=\frac{(1-\cos\lambda)\lambda}{\sin\lambda-\lambda}C\text{。}$$

此时，精确解析求解获得了在该边界条件下石墨烯增强功能梯度梁屈曲问题解的形式，即

$$W(X)=C\left[1-\cos(\lambda X)+\frac{\cos\lambda-1}{\sin\lambda-\lambda}\sin(\lambda X)+\frac{\lambda(1-\cos\lambda)}{\sin\lambda-\lambda}\right] \tag{19}$$

式中 C 为与轴向载荷 P 有关的常数。再将式(19)代入式(15)可得

$$C=\frac{2}{\sqrt{F}}\cdot\sqrt{\frac{P}{\lambda^2}-1} \tag{20}$$

替换式(18d)中的 C_1、C_2 和 C_3 可得边界条件为两端夹紧时，石墨烯增强功能梯度梁屈曲的特征方程，即

$$2-2\cos\lambda-\lambda\sin\lambda=0 \tag{21}$$

由特征方程(21)可以求得边界条件为两端夹紧时的无量纲特征值为

$\lambda_1=6.283$，$\lambda_2=8.987$，$\lambda_3=12.566$，$\lambda_4=15.451$，$\lambda_5=18.850$，…

采用归一化方法令 $C=1$，将特征值 λ_n 代入式(19)可得石墨烯增强功能梯度梁的第 n 阶屈曲模态。

$$W_n = (1 - \cos\lambda_n X) + \frac{(\cos\lambda_n - 1)(\sin\lambda_n X - \lambda X)}{\sin\lambda_n - \lambda_n} \tag{22}$$

由最小特征值 $\lambda_1 = 6.283$，即为 2π，将其代入到式(15)，可得两端夹紧时 FG-GPLRC 梁的屈曲临界载荷的解析表达式，即

$$P_{cr} = 4\pi^2 \frac{D_{11}}{D_0}$$

式中 $D_0 = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E_M}{1 - \nu_M^2} z^2 dz$ 为纯基体梁的弯曲刚度。

对齐次方程(16)进行求解可得两端夹紧 FG-GPLRC梁的临界屈曲载荷对应的后屈曲挠度表达式为

$$W(X) = \frac{2}{\sqrt{F}} \sqrt{\frac{P_0}{4\pi^2}\frac{D_0}{D_{11}} - 1}\,[1 - \cos(2\pi X)] \tag{23}$$

2　数值算例分析

此部分给出解析结果的数值算例。选取纯环氧树脂作为基体材料，其弹性模量为 3 GPa、密度为 1.2 g/cm^3、泊松比为 0.34[23]。综合考虑制造成本和力学性能，梁的总层数 N_L 取 10，梁的厚度 h = 0.01 m、长细比为 10。石墨烯的弹性模量为 1.01 TPa、密度为 1.062 g/cm^3、泊松比为 0.186。如无特别说明，石墨烯的质量分数为 0.3%、几何尺寸为 l_{GPL} = 2.5 μm、b_{GPL} = 1.5 μm 和 h_{GPL} = 1.5 μm[23]。

为了证明本研究的理论推导及求解过程的正确性，将本研究的结果与文献[14]中使用微分求积法所得的相应结果作比较。引入文献[14]中的无量纲载荷形式：$P = \frac{\bar{P}}{A_{110}}$，其中 $A_{110} = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E_M}{1 - \nu_M^2} dz$ 表示纯基体梁的刚度系数。计算得到两端夹紧边界条件下，当 GPL 的重量分数分别为 0.1% 和 0.3% 时梁的无量纲屈曲临界载荷的数值结果，并将该临界载荷与文献[14]中使用微分求积法所获得的相应结果同时列入表 1 中。由表 1 可见，用本研究中的解析求解方法所得的结果与文献[14]中数值方法所求的结果极其接近，故证明了本研究理论推导及解析求解过程的正确性。

表 1　石墨烯增强功能梯度梁的无量纲屈曲临界载荷比较

Tab. 1　Comparison of dimensionless critical buckling loads for the FG-GPLRC beams

	g_{GPL}/%	U-GPLRC	X-GPLRC	O-GPLRC
本研究	0.1	0.038 4	0.041 0	0.033 2
文献[14]	0.1	0.039 1	0.043 3	0.034 9
本研究	0.3	0.057 7	0.070 3	0.044 1
文献[14]	0.3	0.058 6	0.070 9	0.045 8

首先画出了石墨烯增强功能梯度梁的前四阶屈曲模态(图 2)，由图 2 可见该复合材料梁的屈曲构型与均匀材料或者一般功能梯度材料梁的屈曲构型相同。

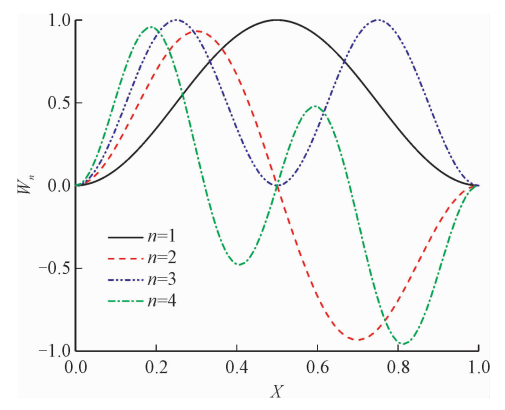


图 2　石墨烯增强功能梯度梁的前 4 阶屈曲模态

Fig. 2　The first four order buckling modes of the FG-GPLRC beam

其次分析 FG-GPLRC 梁的临界屈曲载荷及其影响因素。图 3 给出了不同石墨烯重量分数梁的临界屈曲载荷，其中横坐标和纵坐标分别表示 GPL 的宽厚比和梁的临界屈曲载荷。

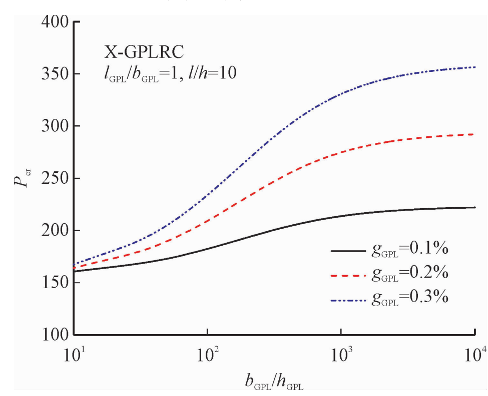


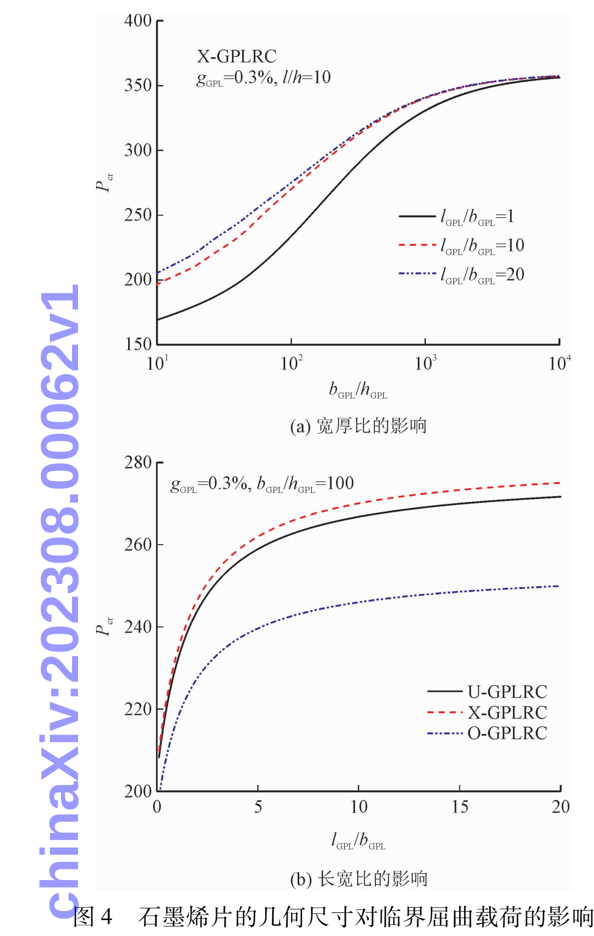
图 3　石墨烯质量分数对临界屈曲载荷的影响

Fig. 3　Effect of graphene mass fraction on the critical buckling loads

由图 3 可见当 GPL 在基体中的占比越高时，梁的临界屈曲载荷也越大。尤其当石墨烯片的宽厚比较大时，增强效果更加明显，石墨烯片宽厚比为

10^4 、含量仅为0.3%时的FG-GPLRC梁的临界屈曲载荷是纯基体梁的4.2倍。

为了更进一步考察石墨烯片的几何尺寸对梁屈曲的影响,图4画出了梁的临界屈曲载荷随GPL的几何参数变化的关系曲线,其中图4(a)和图4(b)的横坐标分别表示GPL的宽厚比和长宽比,纵坐标为梁的临界屈曲载荷。



(a) 宽厚比的影响

(b) 长宽比的影响

图4 石墨烯片的几何尺寸对临界屈曲载荷的影响

Fig. 4 The influence of the geometry size of GPL on the critical buckling loads

在石墨烯总含量和石墨烯的宽度不变的情况下,较大的长宽比意味着石墨烯片具有较大的表面积,较大的宽厚比意味着在石墨烯中所含的单层石墨烯片较少[6]。因此,从图4(a)中可以发现随着宽厚比的增大,临界屈曲载荷也随之增大,说明含有较少的单层石墨烯片时增强效果更加明显。但当宽厚比大于10^3时这种变化不太明显,即宽厚比大于10^3时,再无法通过增大GPL的宽厚比来有效提高梁的强度。从图4(b)中看到随着长宽比的增大,临界屈曲载荷也随之增大,说明具有较大表面积的石墨烯片对于功能梯度梁的强度具有明显的增强效果。但当$l_{GPL}/b_{GPL} > 4$后对临界屈曲载荷的影响变得不太明显,即$l_{GPL}/b_{GPL} > 4$时,也无法通过增大GPL的长宽比来提高增强效果。由图4(b)也发现,不同的GPL分布形式对临界屈曲载荷的增强效果不同,X-GPLRC模式能更有效地提高梁的临界载荷,增强效果最好,即在梁的上下表面分散由较少单层石墨烯片组成的石墨烯是提高梁的临界载荷的最有效方法。

最后分析FG-GPLRC梁的后屈曲响应及其影响因素。图5和图6分别绘出了GPL的质量分数和分布形式不同时的石墨烯增强功能梯度梁的后屈曲路径,其中横坐标和纵坐标分别表示梁的轴向载荷和后屈曲最大挠度。由图5可见,随着GPL质量分数的增大,梁的后屈曲承载能力也随之显著增大。由图6可见,3种分布模式下的FG-GPLRC梁都具有稳定的后屈曲路径,并且X-GPLRC分布模式下梁具有更高的后屈曲承载能力,其次是U-GPLRC分布,最后是O-GPLRC分布。也就是说X-GPLRC分布模式在上表面和下表面具有更高的GPL含量,梁的弯曲刚度最高,所以梁具有更强的承载能力。

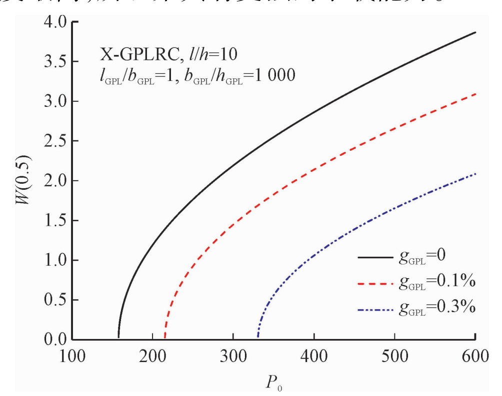


图5 石墨烯的质量分数对后屈曲路径的影响

Fig. 5 Effect of the graphene mass fraction on the post-buckling paths

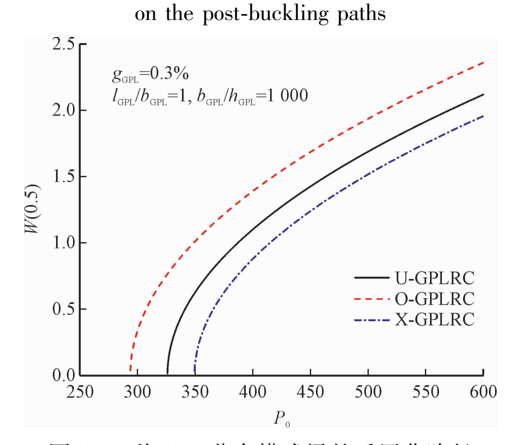


图6 3种GPL分布模式梁的后屈曲路径

Fig. 6 Post-buckling paths of the beams with three GPL distribution modes

图 7 和图 8 表示了 GPL 的几何尺寸对后屈曲路径的影响，图中不同曲线分别代表 GPL 的长宽比和宽厚比不同梁的后屈曲路径。由图可见，随着 GPL 的长宽比和宽厚比的增大，梁的后屈曲最大挠度逐渐减小，具有更高的后屈曲承载能力。

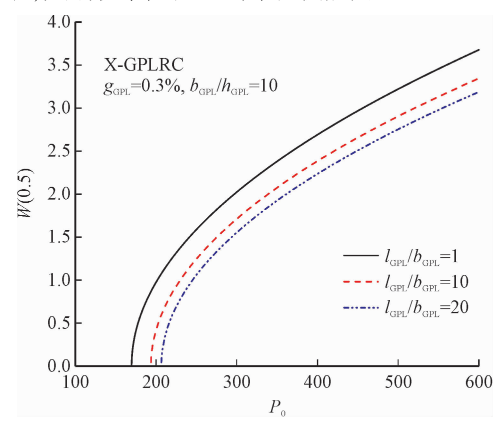


图 7　石墨烯片的几何尺寸对后屈曲路径的影响

Fig. 7　Effect of geometry size of graphene platelets on the post-buckling paths

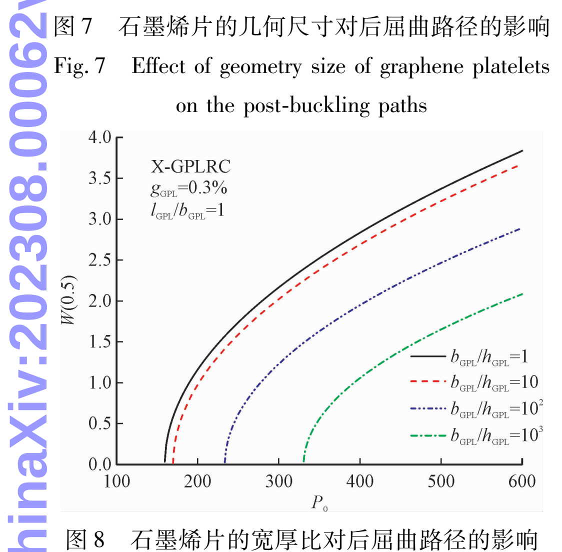


图 8　石墨烯片的宽厚比对后屈曲路径的影响

Fig. 8　Effect of width-to-thickness ratio of graphene platelets on the post-buckling paths

图 9 绘出了不同分布形式的石墨烯增强功能梯度梁的后屈曲构型图，其中给定无量纲载荷 $P=250$。

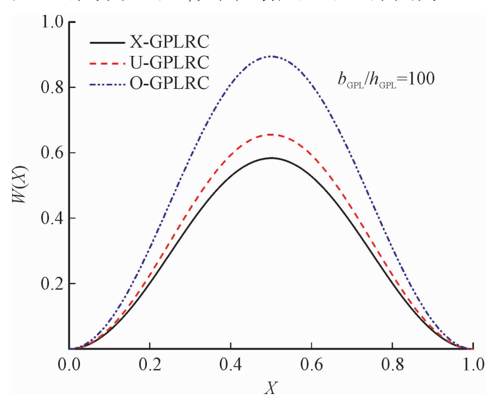


图 9　FG-GPLRC 梁的后屈曲构型

Fig. 9　Post-buckling configurations of the FG-GPLRC beams

由其变化曲线可知不同 GPL 分布模式的后屈曲变形有一定的差异，这是因为不同分布模式梁的强度不同，相比其他分布模式，X-GPLRC 分布模式下的功能梯度梁具有最高的弯曲刚度，所以其挠度值最低。

3　结　论

本研究通过精确解析求解非线性微分方程研究了石墨烯增强功能梯度梁的屈曲及后屈曲特性，获得了屈曲临界载荷、屈曲模态及后屈曲挠度的解析表达式。并通过解析表达式的数值算例探讨了不同的 GPL 分布模式、几何尺寸和重量分数等参数对石墨烯增强功能梯度梁的非线性屈曲及后屈曲的影响，获得如下主要结论。

1）加入极少量的 GPL 可以显著提高功能梯度梁的临界屈曲载荷和后屈曲承载力，即对梁的强度和刚度具有明显的增强效应。

2）当 GPL 具有较大的表面积和较少的单层石墨烯片时，能提高对梁的增强效应，其临界载荷增大，后屈曲挠度减小。

3）不同的 GPL 分布形式对梁的增强效果不同，当石墨烯以 X-GPLRC 分布时，即梁的上下表面具有较多的 GPL，梁具有更高的承载能力以及临界屈曲载荷。

参考文献：

[1]　SHEN H S, XIANG Y. Postbuckling behavior of functionally graded graphene-reinforced composite laminated cylindrical shells under axial compression in thermal environments[J]. Computer methods in applied mechanics and engineering, 2018, 330: 64-82.

[2]　SONG M T, YANG J, KITIPORNCHAI S, et al. Buckling and post-buckling of biaxially compressed functionally graded multilayer graphene nanoplatelet-reinforced polymer composite plates[J]. International journal of mechanical sciences, 2017, 131/132: 345-355.

[3]　张靖华，吕亚丽. 冲击载荷作用下功能梯度梁瞬态响应的解析解[J]. 船舶力学, 2020, 24(4): 512-517.
ZHANG Jinghua, LÜ Yali. Analytical solutions of transient response of functionally-gradient beam subjected to impact load[J]. Journal of ship mechanics, 2020, 24(4): 512-517(in Chinese).

[4]　KITIPORNCHAI S, CHEN D, YANG J. Free vibration and elastic buckling of functionally graded porous beams reinforced by graphene platelets[J]. Materials & design, 2017, 116: 656-665.

[5]　WU H L, YANG J, KITIPORNCHAI S. Dynamic instability of functionally graded multilayer graphene nanocomposite beams in thermal environment[J]. Composite structures, 2017, 162: 244-254.

[6] YANG Z C, LIU A R, YANG J, et al. Dynamic buckling of functionally graded graphene nanoplatelets reinforced composite shallow arches under a step central point load[J]. Journal of sound and vibration, 2020, 465: 115019.

[7] LU H M, ZHANG W, MAO J J. Buckling analyses of functionally graded graphene nanoplatelets reinforced nonlocal piezoelectric microplate[C]//IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. Bristol, United Kingdom: IOP Publishing, 2020: 012103.

[8] KIANI Y. Buckling of functionally graded graphene reinforced conical shells under external pressure in thermal environment[J]. Composites part B: Egineering, 2019, 156: 128-137.

[9] TAM M, YANG Z C, ZHAO S Y, et al. Vibration and buckling characteristics of functionally graded graphene nanoplatelets reinforced composite beams with open edge cracks[J]. Materials, 2019, 12(9): 1412.

[10] SHAHGHOLIAN D, SAFARPOUR M, RAHIMI A R, et al. Buckling analyses of functionally graded graphene-reinforced porous cylindrical shell using the Rayleigh-Ritz method[J]. Acta mechanica, 2020, 231(5): 1887-1902.

[11] PARASHAR A, MERTINY P. Representative volume element to estimate buckling behavior of graphene/polymer nanocomposite[J]. Nanoscale research letters, 2012, 7(1): 515.

[12] EBRAHIMI F, QADERI S. Stability analysis of embedded graphene platelets reinforced composite plates in thermal environment[J]. The european physical journal plus, 2019, 134(7): 349.

[13] SUN J B, NI Y W, GAO H Y, et al. Torsional buckling of functionally graded multilayer graphene nanoplatelet-reinforced cylindrical shells[J]. International journal of structural stability and dynamics, 2020, 20(1): 2050005.

[14] YANG J, WU H L, KITIPORNCHAI S. Buckling and postbuckling of functionally graded multilayer graphene platelet-reinforced composite beams[J]. Composite structures, 2017, 161: 111-118.

[15] CHEN D, YANG J, KITIPORNCHAI S. Nonlinear vibration and postbuckling of functionally graded graphene reinforced porous nanocomposite beams[J]. Composites science and technology, 2017, 142: 235-245.

[16] SHEN H S, LIN F, XIANG Y. Nonlinear bending and thermal postbuckling of functionally graded graphene-reinforced composite laminated beams resting on elastic foundations[J]. Engineering structures, 2017, 140: 89-97.

[17] WANG Y, FENG C, SANTIUSTE C, et al. Buckling and postbuckling of dielectric composite beam reinforced with graphene platelets (GPLs)[J]. Aerospace science and technology, 2019, 91: 208-218.

[18] ANSARI R, TORABI J. Semi-analytical postbuckling analysis of polymer nanocomposite cylindrical shells reinforced with functionally graded graphene platelets[J]. Thin-walled structures, 2019, 144: 106248.

[19] SONG M T, CHEN L, YANG J, et al. Thermal buckling and postbuckling of edge-cracked functionally graded multilayer graphene nanocomposite beams on an elastic foundation[J]. International journal of mechanical sciences, 2019, 161-162: 105040.

[20] SAHMANI S, AGHDAN M M. Axial postbuckling analysis of multilayer functionally graded composite nanoplates reinforced with GPLs based on nonlocal strain gradient theory[J]. The european physical journal plus, 2017, 132(11): 490.

[21] AFFDL J C H, KARDOS J L. The Halpin-Tsai equations: a review[J]. Polymer engineering & science, 1976, 16(5): 344-352.

[22] RAFIEE M A, RAFIEE J, WANG Z, et al. Enhanced mechanical properties of nanocomposites at low graphene content[J]. ACS Nano, 2009, 3(12): 3884-3890.

[23] LIU F, MING P B, LI J. *Ab initio* calculation of ideal strength and phonon instability of graphene under tension[J]. Physical review B, 2007, 76(6): 064120.

（编辑 张璐）